Université de Lorraine - UFR MIM - 2015/2016
Cours MATLAB

MATLAB 2

Calcul matriciel

J-P. Croisille

1- Assemblage de vecteurs et matrices
La caractéristique essentielle de MATLAB pour l'utilisateur est de permettre les opérations arithmétiques sur les vecteurs et matrices, comme en mathématique. En calcul scientifique, on parle de *calcul vectoriel*. Un élément fondamental de l'apprentissage de MATLAB consiste donc à savoir effectuer des opérations matricielles de façon compacte, **sans programmer de boucles sur les indices**. Commençons par étudier différentes opérations pour *assembler* des vecteurs et des matrices.
1) Entrer le vecteur $v \in \mathbb{R}^8$ suivant

$$v = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]^T \tag{1}$$

sous la forme
```
V=[1,2,3,4,5,6,7,8]';
V1=V;
```
2) On peut aussi écrire:
```
V=(1:8)';
```
3) On peut utiliser une raison arithmétique si nécessaire. Par exemple, entrer

$$v = [1, 3, 5, 7]^T \tag{2}$$

par la commande `V3=(1:2:8)';`.
5) Sur le même mode, entrer

$$v = [-4, -1.5, 1, 3.5, 6, 8.5, 11]^T \tag{3}$$

par la commande `V4=-4:2.5:13;`.
6) Pour créer un vecteur de 100 valeurs entre `X1` et `X2`, entrer `linspace(X1,X2)`. Pour paramétrer le nombre de valeurs désirées `N` entre `X1` et `X2`, entrer `linspace(X1,X2,N);`. Entrer le vecteur (**??**) sous cette forme.

2- Assemblage de matrices ligne par ligne et colonne par colonne
1) On considère les vecteurs donnés par `V1=linspace(-10,50,4)`, `V2=linspace(10,40,4)`, `V3=linspace(0,11.5,4)`, `V4=linspace(-90,5,4)`. Construire la matrice A dont les lignes sont V_1, V_2, V_3, V_4 par `A=[V1;V2;V3;V4]`, puis la matrice B dont les colonnes sont $V_1^T, V_2^T, V_3^T, V_4^T$ par `B=[V1',V2',V3',V4']`.
2) Utiliser `repmat(val,size)` pour créer un vecteur ou une matrice constante. Assembler par exemple les vecteur $V_5 = [\pi, \pi, \pi, \pi]^T$, $V_6 = [2, 2, 2, 2]^T$, puis la matrice constante 4×4 V de terme constant 2π en utilisant `repmat`.

3- Arithmétique matricielle

1) Entrer les matrice réelles

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \tag{4}$$

sous la forme `A=[1,2,3; 4,5,6; 7,8,9];`. Entrer ensuite

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & -9 \end{pmatrix} \tag{5}$$

puis $C = A + iB$.

Les opérations arithmétiques matricielles élémentaires sont

+ addition

- soustraction

* multiplication

/ division à droite, c'est-à-dire si A, B sont deux matrices avec B inversible, AB^{-1} s'obtient par `A/B`.

\ division à gauche, c'est-à-dire si A, B sont deux matrices avec B inversible, $B^{-1}A$ s'obtient par `B\A`.

ˆ exponentiation

' transconjuguée

.' transposée simple

`inv(A)` : Calcul de l'inverse A^{-1} de la matrice A lorsqu'elle est inversible.

Evaluer $A+B$, AB, $(A+B)^2$, $(A+B)^2+(A-B)^2-4AB$, C^*, C^T, C^{-1}, $F=(A-B)^{-1}$.
Evaluer $(C^{-1})^*$, puis $(C^*)^{-1}$.
Essayer de calculer $(A+B)^{-1}$. Evaluer $(A+B)(A-B)^{-1}$, puis $(A-B)^{-1}(A+B)$.

2) Lorsque les opérations arithmétiques sont effectuées terme à terme (et non pas matriciellement) on met un point devant l'opérateur:

.* multiplication terme à terme

./ division à droite terme à terme

.\ division à gauche terme à terme, identique à la précédente.

Calculer les matrice D, E, F, G donnée par $D_{i,j} = A_{i,j}B_{i,j}$, $E_{i,j} = A^2_{i,j}$,$F_{i,j} = C^3_{i,j}$,$G_{i,j} = A_{i,j}/C_{i,j}$.

4) Les matrices CC^T, CC^*, sont- elles symétriques, hermitiennes? Le tester avec un test logique.

4- Multiplication de matrices rectangulaires

La multiplication matricielle opère naturellement sur les matrices rectangulaires. Pour $A \in \mathbb{M}_{m,n}$, $B \in \mathbb{M}_{n,p}$, la matrice $C = AB \in \mathbb{M}_{m,p}$ se calcule par `C=A*B`. Ceci est naturellement valable en particulier si $B = V$ est un vecteur colonne à n dimensions (tableau $n \times 1$).

1) Soit A la matrice de l'exercice précédent et J la matrice 3×2 définie par

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \\ -7 & 8 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Calculer $L = AJ$. Essayer de calculer $M = JA$.

2) Soit B la matrice de l'exercice précédent et V le vecteur

$$V = [-4, 6, 12]^T \tag{7}$$

Calculer $(A-B)V$ puis $V^T(A-B)$. Essayer de calculer $(A-B)V^T$.
3) Pour calculer $(A-B)^{-1}V$, comparer `inv(A-B)*V` et `(A-D)\V`. Quelle est la différence algorithmique entre ces deux commandes ?

5- Quelques matrices particulières
1) On considère la matrice de Hilbert H d'ordre n définie par

$$H_{i,j} = \frac{1}{i+j-1} \ , \ \ 1 \leq i,j \leq n \tag{8}$$

Entrer la matrice de Hilbert d'ordre 6, par `H=hilb(6)`). Calculer le rang et le déterminant de H en utilisant ls commandes `det` et `rank`. Calculer $||H||_2, ||H||_1, ||H||_\infty$ par `norm(H)`), `norm(H,1)`), `norm(H,inf)`.
2) Soit `C=[1,2,3,4,5,6].'` et `L=[1,3,5,7,9,11]`. Construire la matrice de Toeplitz (voir `help toeplitz`) de vecteurs `L,C`. Calculer ses valeurs propres, son déterminant.
3) Rappeler la définition de la matrice de Vandermonde, (voir `help vander`). Entrer la matrice de Vandermonde d'ordre 6 d'un vecteur de votre choix $V = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6]$. Vérifier que son déterminant vaut $\prod_{1 \leq i<j \leq 6}(a_i - a_j)$.
4) Essayer `magic(n)` avec n un entier pour assembler une matrice de type carré magique.
5) Si `x` est un vecteur, `diag(x)` crée la matrice diagonale dont la digonale est le vecteur `x`. Si `A` est une matrice carrée, `diag(A)` est le vecteur constitué par la diagonale de `A`. Que fait la commande `diag(diag(A))` ? Essayer la avec par exemple une matrice de Hilbert.

6- Fonctions matricielles: trace, déterminant, exponentielle
1) Entrer le vecteur V dont les composantes sont les entiers -4+3k supérieurs a -4 et infèrieurs à 11.
2) Assembler la matrice $M = V^TV$. Utiliser les commandes `size` et `rank` pour trouver dimension et rang de `M`.
3) Quel est le déterminant de M? Le vérifier à l'aide de la commande `det`.
4) Calculer la trace de M, (commande `trace`).
5) Entrer la matrice 3x3, notée O, dont tous les éléments sont des 1 à l'aide de la commande `O=ones(3)` puis la matrice identité 3x3 Id_3 à l'aide de la commande `I=eye(3)`.
6) Calculer l'exponentielle de I et de M par `expm(I)`, puis `expm(M)`.

7- Valeurs propres, vecteurs propres
On considère la matrice M de l'exercice précédent.
1) Calculer les valeurs propres de M par `lambda=eig(M)`.
2) On considère la matrice de Vandermonde de vecteur V (exercice précédent). Calculer à l'aide de la commande `eig` les valeurs propres de cette matrice.

8- Inverse, polynôme caractéristique, déterminant.
1) Assembler la matrice de Hilbert d'ordre 5.
2) Calculer son polynôme caractéristique.
3) Calculer son déterminant.
4) Calculer son inverse.

9- Normes matricielles.
1) Entrer la matrice symétrique A de coefficients $a_{i,j} = \sin(ij\pi/N)$ pour $N = 10$, $1 \leq i,j \leq N-1$. Est-elle définie positive ?
2) Calculer la norme $\|A\|_2$. (`norm`). Comparer avec le maximum des valeurs propres de A.
3) Calculer $\|A\|_1$ par `norm(A,1)` après avoir rappelé la définition. Vérifier numériquement sur cet exemple que $\|A\|_1 = max_i \sum_{j=1}^N |a_{i,j}$.

4) Calculer $\|A\|_\infty$ par `norm(A,infty)` après avoir rappelé la définition. Vérifier numériquement sur cet exemple que $\|A\|_1 = max_j \sum_{i=1}^{N} |a_{i,j}$.
5) La norme de Frobenius de A est

$$\|A\| = \sum_i \sum_j |a_{i,j}| \tag{9}$$

Calculer $\|A\|$ sans aucune boucle.